

Neisomorfní grafy II

Kateřina Bambuřková
BAM015, I206

Abstrakt

Tentokrát řešíme problém nalezení všech neisomorfních grafů, které lze získat z kružnice délky 8, přidáním nejvýše 4 nových hran. Jelikož neznáme žádný obecný princip je celé řešení založeno na postupném zkoušení všech možností, kterých naštěstí není mnoho, hlavně díky tomu, že do řešení nezahrnujeme neisomorfní grafy, které obsahují trojúhelník neboli kružnici délky 3.

1. Lehký úvod do teorie grafů

Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran. Vrcholy spojené hranou jsou sousedé. Na graf se lze dívat jako na symetrickou reflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace. Grafy se často zadávají přímo obrázkem, nebo výčtem vrcholů a hran.

Stupeň vrcholů v grafu $d_G(v)$ je roven počtu hran vycházejících z vrcholu v . Součet stupňů v grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran.

Podgraf je část grafu. Ale musíme dávat pozor, aby nám nezbyly hrany bez vrcholů. Podgrafem grafu G je libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

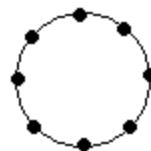
Isomorfismus je vzájemně jednoznačné zobrazení $f: V(G) \rightarrow V(H)$, pro které platí, že každá dvojice vrcholů $u, v \in V(G)$ je spojena hranou v G právě tehdy, když je spojena hranou v H . Isomorfní grafy mají vždy stejný počet vrcholů stejného stupně, ale tato podmínka nezaručuje isomorfismus!

2. Popis problému

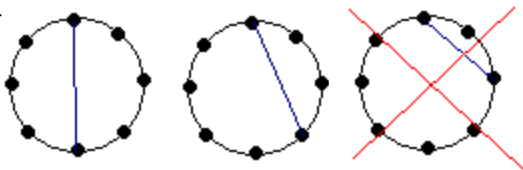
Nalézt všechny neisomorfní grafy, které lze získat z kružnice délky 8 s možností přidání nejvýše 4 nových hran, ale grafy nesmějí obsahovat trojúhelník, což je kružnice délky 3. Neisomorfní graf musí mít stejný počet vrcholů stejného stupně, ale liší se v jejich uspořádání, má jinak propojené vrcholy hranami a nedokážeme najít isomorfismus mezi těmito grafy.

3. Řešení problému

Kružnice délky 8 může vypadat například takto:



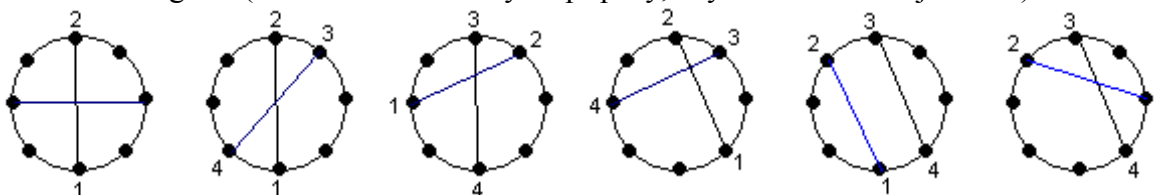
1) Přidáním 1 hrany do kružnice délky 8 můžeme získat 3 neisomorfní grafy, ale jen ve dvou případech dojdeme k požadovanému výsledku. V případě třetím nám vznikne v grafu podgraf trojúhelník.



Někoho určitě napadá otázka „Co když spojíme jiné dva vrcholy?“ Snadná odpověď tyto grafy by pak byly navzájem isomorfní.

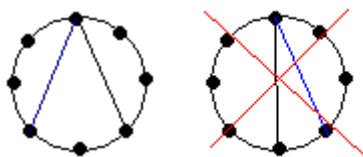
2) Přidáním 2 hran do kružnice délky 8. Tady už je možností poněkud více.

a) hrany budou spojovat vždy nové vrcholy. Tím získáme 6 pro nás vyhovujících neisomorfních grafů (už se nebudeme zabývat případy, kdy nám vzniká trojúhelník).



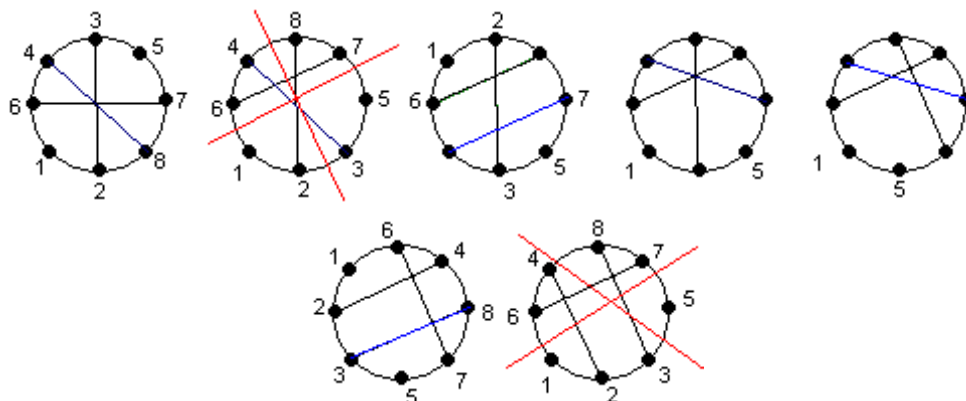
Strategicky vhodným popisem vrcholů je vidět, že tyto grafy jsou navzájem neisomorfní.

b) nové hrany vycházejí ze společného vrcholu. Zde je pouze jedna možnost, protože u dalších způsobů opět vzniká trojúhelník.



3) Přidáním 3 hrany máme opět několik možností.

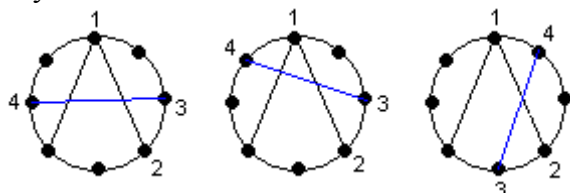
a) opět budeme spojovat jen nové vrcholy. U kružnice délky 8 to je těchto 5 grafů:



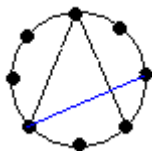
Jako strategicky velmi vhodnými body k popisu vrcholů jsou jediní 2 vrcholy stupně 2 označené v obrázcích jako 1 a 5.

U zbylých možnosti vznikají opět navzájem isomorfní grafy nebo trojúhelníky jako podgrafy.

b) v této části opět můžou nové hrany vycházet ze společného vrcholu. U kružnice délky 8 to jsou tyto možnosti:

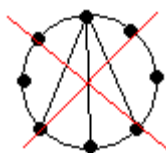


u těchto grafů, je velmi pěkný strategický vrchol označený jako 1 (vrchol stupně 4)



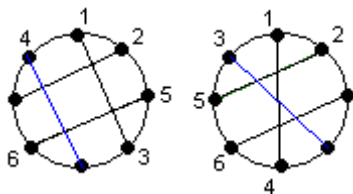
u tohoto grafu jsou 2 vrcholy stupně 4

c) 3 nové hrany z jednoho vrcholu vycházet nemohou, protože tam pak vzniká podgraf typu trojúhelník.



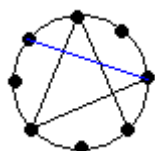
4) 4 hrana do kružnice délky 8.

a) u nových vrcholů máme dvě možnosti:

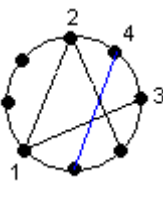
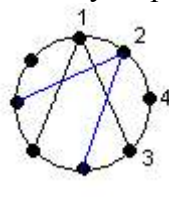


i tyto grafy jsou navzájem neisomorfní, jak je vidět z označení vrcholů

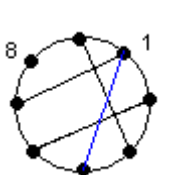
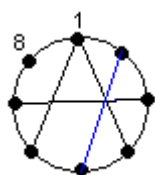
b) u společných vrcholů nalezneme 3 grafy vyhovující našim požadavkům:



3 vrcholy stupně 4



2 vrcholy stupně 4 označené jako 1,2



Strategicky velmi pěkné body jsou vrcholy stupně 2 značeno jako 8
a vrcholy stupně 4 značeno jako 1

4. Závěr

Co říci na závěr? Snad jen, že celkem jsme našli „27“ neisomorfních grafů. Jelikož je metoda založena na postupném přidávání hran k předchozím možnostem řešení (procházeny byly všechny možnosti, ale často se stávalo, že grafy byly navzájem isomorfní nebo vznikaly jako podgrafy trojúhelníky), dá se předpokládat, že by řešení mělo být správné (navzájem nenalezen isomorfismus, jak je pěkně vidět z označení strategicky významných bodů a porušení totožné návaznosti s ostatními vrcholy), ale ani tak nevylučují případnou chybu z nepozornosti ;-)